

Определите коэффициент при x^4 разложения функции $f(x)=e^{-3x} \cdot \sin 6x$

Решение.

Вспомним известные разложения экспоненты и синуса в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Найдём разложение заданной функции в ряд Маклорена перемножением рядов, в которые вместо x подставлено $-3x$ и $6x$, соответственно.

$$f(x) = e^x \cdot \sin 6x =$$

$$= \left(1 + (-3x) + \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3!} + \frac{(-3x)^4}{4!} + \frac{(-3x)^5}{5!} + \dots \right) \cdot$$

$$\cdot \left(6x - \frac{(6x)^3}{3!} + \frac{(6x)^5}{5!} - \dots \right) =$$

$$= \left(1 - 3x + \frac{9x^2}{2} - \frac{27x^3}{6} + \frac{81x^4}{24} - \frac{243x^5}{120} + \dots \right) \cdot$$

$$\cdot \left(6x - \frac{216x^3}{6} + \frac{6^5 x^5}{120} - \dots \right)$$

Теперь, чтобы выполнить задание поймём, что в этом произведении четвёртая степень икса может быть получена двумя способами: умножением слагаемого с первой степенью икса на слагаемое с третьей степенью икса и

наоборот слагаемого с третьей степенью икса на слагаемое с первой степенью икса:

$$-3x \cdot \left(-\frac{216x^3}{6} \right) + \left(-\frac{27x^3}{6} \right) \cdot 6x = \left(\frac{3 \cdot 216}{6} - \frac{27 \cdot 6}{6} \right) x^4$$

Поэтому коэффициент при x^4 будет равен:

$$\frac{3 \cdot 216}{6} - \frac{27 \cdot 6}{6} = 3 \cdot 36 - 27 = 108 - 27 = 81$$